



GUIA DE APRENDIZAJE AUTONOMO PARA RECUPERACION AÑO 2017

GRADO: SEPTIMO

ASIGNATURA: MATEMATICAS

DOCENTE: YAMILLE RAMIREZ

TEMAS SOBRE LOS CUALES SE REALIZA LA RECUPERACIÓN:

- 1. NÚMEROS ENTEROS.**
- 2. NÚMEROS RACIONALES.**
- 3. PROPORCIONALIDAD.**

OBJETIVOS:

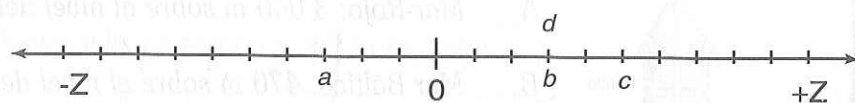
1. Reconocer el conjunto de los números enteros y solucionar problemas de aplicación a través del uso de sus operaciones.
2. Reconocer el conjunto de los números enteros y solucionar problemas de aplicación a través del uso de sus operaciones.
3. Solucionar problemas de aplicación utilizando regla de tres simple, regla de tres compuesta y repartos proporcionales.

RECOMENDACIONES GENERALES:

1. Lea con detenimiento la descripción del procedimiento a aplicar de acuerdo a la temática que se está abordando, prestándole especial atención al ejemplo que se ilustra.
2. Resuelva los ejercicios propuestos buscando no solo memorizar los procedimientos aplicados sino la interpretación correcta de la información suministrada.
3. En el material que se adjunta a continuación que pertenece al texto OLIMPIADA MATEMATICAS 7, Editorial Voluntad, para cada tema aparece una explicación del tema con los respectivos ejemplos y una serie de ejercicios que se deben desarrollar en forma ordenada en hojas de examen mostrando el debido procedimiento en forma clara y archivando el trabajo realizado en una carpeta.
4. La sustentación del taller compuesto por los ejercicios propuestos se realizará en enero de 2018 cuando se renueven las actividades académicas y se debe cumplir con el requisito de presentar el desarrollo de todos los ejercicios propuestos.

Orden en los números enteros

Al comparar dos números enteros sobre la recta numérica es mayor aquel que se encuentre a la derecha del otro.



***b* es mayor que *a*: $b > a$**

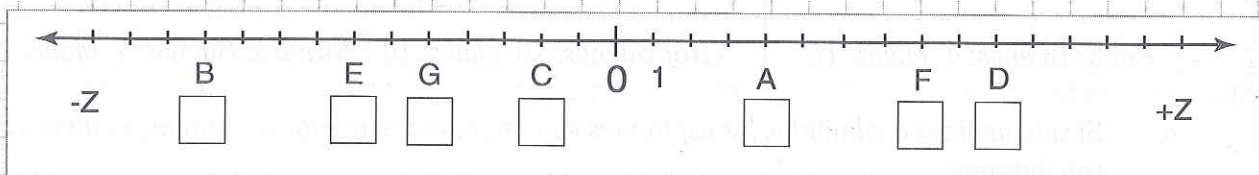
***b* es menor que *c*: $b < c$**

$b = d$

El conjunto de los enteros positivos lo denotamos como Z^+ en tanto que Z^- denotará el conjunto de enteros negativos.

Es de notar que cualquier entero negativo es menor que cualquier entero positivo.

1. Escribe en el cuadro correspondiente el entero que representa cada una de las letras. Luego ubica los opuestos de cada uno de esos enteros.



2. Si el opuesto de un cierto número es un número negativo, ¿qué puedes decir del número?

3. Escribe derecha o izquierda para completar cada uno de los siguientes enunciados. Después escribe $>$ o $<$.

a. -4 está a la _____ de 9, por lo tanto, -4 _____ 9

b. -3 está a la _____ de -6 , por lo tanto, -3 _____ -6

c. 4 está a la _____ de 2, por lo tanto, 4 _____ 2

d. -11 está a la _____ de 0, por lo tanto, -11 _____ 0

e. 8 está a la _____ de 5, por lo tanto, 8 _____ 5

4. Escribe cada lista de enteros en orden decreciente:

a. $-3, -5, 3, 1, -10$:

b. $6, -1, 6, 2, -2, 10, -12$:

c. $4, -12, 10, -10, 8, -6, 5, -100$:

d. $10, 15, -32, -26, 28, 0, 2$:

e. $20, -21, 30, 10, -10, 87, -32$:

f. $19, -23, -43, 53, -21, 21, 90, -100$:

5. En un juego se lanzan simultáneamente dos dados: uno verde que permite avanzar una ficha el número que salga y uno rojo que obliga a retrocederla la cantidad de puntos que muestre.

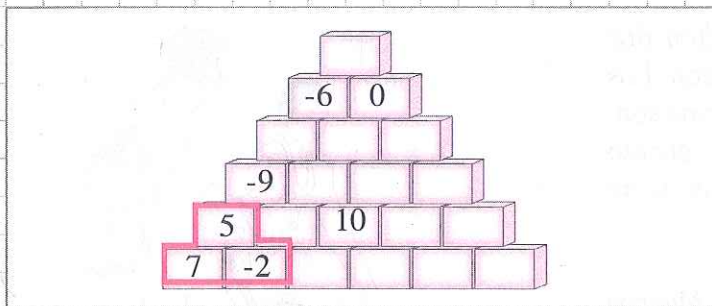
Salida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Meta
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	------

Éstos son los resultados de tres lanzamientos:

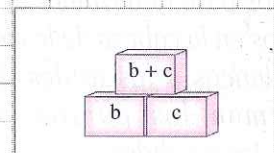
Primer lanzamiento:	VERDE: + 4	ROJO - 2
Segundo lanzamiento:	VERDE: + 6	ROJO - 1
Tercer lanzamiento:	VERDE: + 5	ROJO: - 3

- Una vez efectuados los tres lanzamientos, ¿en qué casilla queda la ficha?
 - ¿Qué deben mostrar los dados para que en el próximo lanzamiento se llegue a la meta?
VERDE: _____ ROJO: _____
 - ¿Hay otras soluciones? Anótalas: _____
 - Practica este juego en tu casa o en el salón de clase.
6. Completa estas pirámides con enteros usando la regla que se indica en cada caso:

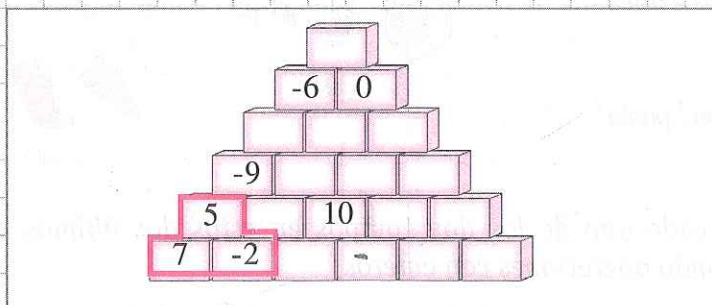
a.



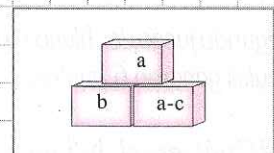
Regla



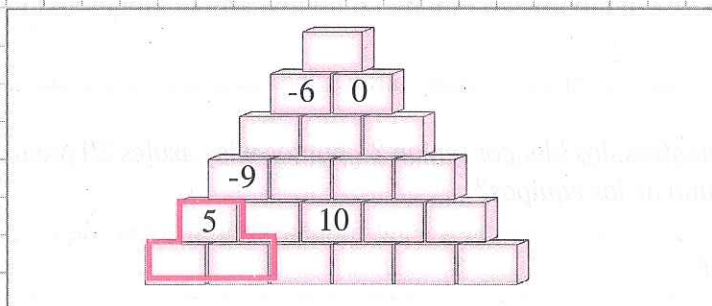
b.



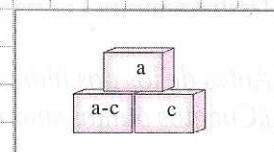
Regla



c.



Regla



3. Escribe dentro del paréntesis si los enunciados siguientes son falsos o verdaderos:

- a. El número 1 es el elemento neutro de la suma de enteros. ()
- b. La suma es una operación conmutativa. ()
- c. En el conjunto de los enteros cada número tiene opuesto. ()
- d. La adición de números enteros es asociativa. ()
- e. El número 0 es el elemento neutro de la suma de enteros. ()

4. Aplica las propiedades de la suma de enteros para hallar cada resultado:

- a. $12 + (-4) + 6 =$
- b. $-10 + (-6) + (-7) =$
- c. $14 + (-8) + (-17) =$
- d. $6 + (-6) + 6 + (-6) =$
- e. $-50 + 43 + (-41) + (-16) =$
- f. $14 + (-6) + (-5) + (-4) =$
- g. $10 + (-11) + (-14) + (-1) =$
- h. $29 + (-8) + (-7) + 6 + (-10) + (-15) =$
- i. $-14 + (-8 + (-6)) + (5 + (-4) + (-3 + 7)) =$
- j. $(-7 + 6 + (-5) + 5) + (-8 + (-13) + 9 + 11) =$

5. En cada caso encuentra dos enteros que satisfagan las condiciones:

- a. Consecutivos cuya suma sea -5: _____
- b. Consecutivos cuya suma sea 7: _____
- c. Consecutivos cuya suma sea -1: _____
- d. Su suma es cero: _____
- e. De signos contrarios cuya suma sea -7: _____
- f. Del mismo signo cuya suma sea 15: _____
- g. De signos contrarios cuya suma sea +4: _____
- h. De signos contrarios cuya suma sea 13: _____

6. Encuentra el valor desconocido en cada una de las siguientes expresiones:

- a. $20 + x = 40$ $x =$
- b. $50 + d = 30$ $d =$
- c. $r + (-65) = 40$ $r =$
- d. $b + 10 = -45$ $b =$
- e. $65 + (-43) = m$ $m =$
- f. $t + (-25) = -100$ $t =$

Ingenio y creatividad

Un número par de tres cifras se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Si al sumar las tres cifras del número nos da 7, ¿cuál es el número?

Sustracción de enteros

Restar dos enteros equivale a sumar el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Ejemplos:

$$-4 - 3 = -4 + (-3) = -7$$

$$8 - (-2) = 8 + 2 = 10$$

1. Realiza las siguientes restas:

a. $6 - 4 =$

f. $-3 - 1 =$

k. $-5 - (-1) =$

b. $-3 - (-3) =$

g. $-6 - 0 =$

l. $0 - (-3) =$

c. $-8 - 2 =$

h. $15 - (-15) =$

m. $41 - (-17) =$

d. $19 - (-1) - (-6) =$

i. $24 - (-5) - (-12) =$

n. $-152 - (-241) =$

e. $20 - 19 - (-7) =$

j. $263 - (-259) - (-13) - 1 =$

o. $1 - (-5) =$

2. Resta el segundo número del primero:

a. $8; 17$

d. $0; -10$

g. $1; -9$

j. $7; -4$

b. $-13; -15$

e. $-7; 25$

h. $-7; -25$

k. $-68; -12$

c. $21; 18$

f. $2; -7$

i. $5; 16$

l. $-11; -33$

3. Completa la siguiente tabla de resta:

			+3				
-5			+2				
			+1				+3
-3	-2	-1	-	+1	+2	+3	+4
-2			-1				
			-2				
			-3		+5		
			-4				

Responde a las siguientes preguntas:

a. ¿Es siempre la diferencia de dos números enteros otro número entero?

b. ¿Son iguales los resultados que obtienes al restar 1 de 2 que 2 de 1?

c. El resultado que obtienes de la operación $(3 - 2) - (-1)$, ¿es el mismo que obtienes la resolver $3 - (2 - (-1))$? ¿Qué puedes deducir de esta observación?

d. ¿Existe un elemento neutro para la resta?

Multiplicación de enteros

- Al multiplicar dos números enteros puede suceder alguno de estos hechos:

a. Los dos enteros son positivos. En este caso el producto es positivo: $3 \times 5 = 15$

b. Uno de los enteros es positivo y el otro negativo. En este caso el producto es negativo:

$$-3 \times 5 = -15$$

$$3 \times (-5) = -15$$

c. Si los dos enteros son negativos, el producto de ellos es positivo: $(-3) \times (-5) = 15$

1. Calcula mentalmente:

a. $4 \times (-8) =$

d. $-4 \times 8 =$

g. $(-4) \times (-8) =$

b. $-7 \times (-9) =$

e. $7 \times (-9) =$

h. $7 \times 9 =$

c. $250 \times (-4) =$

f. $-50 \times (-4) =$

i. $12 \times 4 =$

2. Lee con atención la siguiente nota acerca del signo del producto de tres o más factores:

En general, el producto de varios factores distintos de cero es otro entero cuyo signo es positivo, si todos los factores son positivos o si el número de factores negativos es par; y negativo, si el número de factores negativos es impar.

De acuerdo con la anterior nota, halla el resultado de los siguientes productos:

a. $-7 \times (-3) \times (-1) =$

d. $(-4) \times (-3) \times 2 \times (-1) =$

b. $-12 \times 4 \times (-2) \times 3 =$

e. $-11 \times 2 \times (-3) \times 4 \times (-5) =$

c. $9 \times (-2) \times (-2) \times (-1) =$

f. $8 \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$

3. Efectúa el siguiente producto:

$$\begin{array}{r} 12\ 345\ 679 \\ \times \qquad 9 \\ \hline \end{array}$$

¿Por cuál número de dos cifras debes multiplicar 12 345 679 para obtener un resultado donde aparezca solamente el número 2?

4. Encuentra las cifras desconocidas en cada una de las siguientes multiplicaciones:

a.
$$\begin{array}{r} 37 \\ \times \square\square \\ \hline \square 7 \\ \square 4 \\ \hline \square\square\square \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} \square 4 \square 8 \square 7 \\ \times \square\square\square \\ \hline 9\square 9\square 9\square 9 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 3\ 7\square\square 7 \\ \times \square\square\square \\ \hline \square 9\ 6\ 2\ 9\ 6 \\ \square\square\square\square 7 \end{array}$$

Propiedades de la multiplicación de enteros

- a. La multiplicación de enteros es **clausurativa**, ya que al multiplicar dos números enteros su producto es un número entero.

$$5 \times (-7) = -35$$

5, -7 y -35 son todos números enteros.

- b. Al cambiar el orden de los factores en un producto de enteros el resultado no se altera.

Ésta es la propiedad **conmutativa**.

$$-6 \times (-4) = -4 \times (-6) = 24$$

- c. Para multiplicar dos o más números enteros, primero multiplicamos dos, el producto que resulta lo multiplicamos por el tercer factor y así sucesivamente. Ésta es la propiedad **asociativa**.

$$(-6 \times (-4)) \times 5 = -6 \times (-4 \times 5)$$

$$24 \times 5 = -6 \times (-20)$$

- d. La propiedad **modulativa** afirma que el producto de un entero por 1, arroja como resultado el mismo entero.

$$-6 \times 1 = -6$$

$$14 \times 1 = 14$$

- e. Cuando se multiplica cualquier número por 0, el resultado es 0. Llamaremos a esta propiedad **anulativa**.

$$-6 \times 0 = 0$$

$$0 \times 13 = 0$$

- f. La propiedad **distributiva** establece que el producto de un número entero por la suma o la diferencia de otros dos, puede calcularse mediante la suma o diferencia de los productos del entero que multiplica por cada uno de los enteros que se suman o se restan.

$$6 \times (12 + (-7)) = (6 \times 12) + (6 \times (-7))$$

$$= 72 + (-42) = 30$$

1. Encuentra el número que remplaza la letra e indica la propiedad de la multiplicación utilizada:

a. $12 \times (-7) = f$ $f =$ Propiedad: _____

b. $4 \times m = 6 \times 4$ $m =$ Propiedad: _____

c. $-9b = -9$ $b =$ Propiedad: _____

d. $12 \times (-7) = t$ $t =$ Propiedad: _____

e. $5(d + (-7)) = -30 + (-35)$ Propiedad: _____

2. Observa dos aplicaciones de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y la resta de enteros:

• Productos por 9, 99, 999, etc. $12 \times 9 = 12 \times (10 - 1) = 120 - 12 = 108$

• Productos por 11, 101, 1001, etc. $12 \times 11 = 12 \times (10 + 1) = 120 + 12 = 132$

Potenciación en los enteros y propiedades

Para simplificar la escritura de la operación $2 + 2 + 2 + 2 + 2$, escribimos simplemente: $2 \times 5 = 10$.

Para simplificar la escritura de la operación $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$, escribimos simplemente: $(-2)^5 = -32$.

Exponente

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ (-2)^5 = -32 \rightarrow \text{Potencia} \\ \downarrow \\ \text{Base} \end{array}$$

$(-2)^5$ significa que -2 está escrito 5 veces como factor.

1. Escribe el número usando exponentes:

a. $(-5) \times (-5) =$ c. $3 \times 3 \times 3 =$ e. $4 \times 4 \times 4 \times 4 =$

b. $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ d. $(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) =$

2. Escribe el producto correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a. $3^2 =$ c. $2^4 =$ e. $5^3 =$

b. $6^3 =$ d. $8^2 =$ f. $10^6 =$

3. Completa cada una de las siguientes expresiones:

a. $\square^2 = 144$ c. $\square^2 = 1\ 00$ e. $13^2 = \square$

b. $\square^5 = -243$ d. $\square^7 = -1$ f. $\square^5 = 0$

4. ¿Cuál es el signo del resultado en cada uno de los siguientes casos?

Escribe tres ejemplos en cada uno:

a. La base es positiva y el exponente par: _____

Ejemplos: _____

b. La base es negativa y el exponente par: _____

Ejemplos: _____

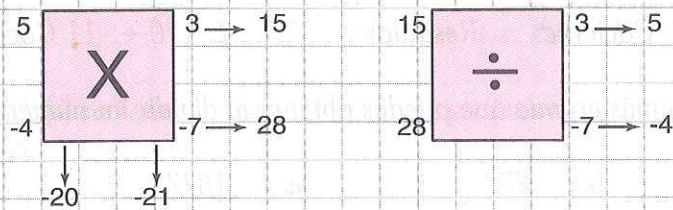
c. La base es positiva y el exponente impar: _____

Ejemplos: _____

d. La base es negativa y el exponente impar: _____

Ejemplos: _____

El esquema de la izquierda resume mediante un ejemplo el manejo de los signos en la multiplicación. Como la división es la operación inversa de la multiplicación, el manejo de los signos es similar, como se muestra a la derecha.



1. Escribe el cociente en cada una de las siguientes divisiones:

a. $-45 \div 9$

e. $-45 \div -9$

i. $45 \div 9$

b.	$625 \div -5$
----	---------------

$$f. \quad 3\,228 \div 2$$

j. $4\,872 \div -5$

c. $-198 \div 18$

g. $1\,530 \div -153$

k. $12\,345 \div -15$

d. $-576 \div -72$

h. $-9\,999 \div -9$

$$1. -69\,680 \div -536$$

2 Halla los valores desconocidos en las siguientes divisiones:

a. $\square \div -2 = -7$

d.

--

 \div

--

 $= 5$

g. $\square \div -7 = 2$

j. $24 \div \boxed{?} = -1$

b. $36 \div \boxed{?} = -9$

e. $\square \div -9 = -4$

0 \div ? = 0

k. $0 \div -11 = \square$

c. $\square \div \square = -1$

$$f. \quad 132 \div \boxed{} = -33$$

$$i. \quad \square \div 5 = -132$$

1. $\square \div \square = 4$

3. En la siguiente división, AB y 7C representan números de dos dígitos. Los espacios en blanco representan dígitos que han sido borrados. ¿Cuál es el valor de A, B y C si se sabe que estas letras representan dígitos diferentes?

AB

7C

0

4. Determina los números que hacen falta para que las divisiones y las sumas sean correctas:

		÷	7 =	
+		÷	13 =	+
√		÷	10 =	√
	100			10

Combinación de operaciones y problemas de aplicación

Para solucionar operaciones combinadas, ten en cuenta lo siguiente:

- Efectúa primero las operaciones que están indicadas en paréntesis.

1º $24 - (8 \div 2) + 3$

2º $24 - 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

- Efectúa luego las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan. Lee el problema de izquierda a derecha.

1º $11 + 15 \div 3 \div 5 + 2$

2º $11 + 5 \div 5 + 2 = 11 + 1 + 2 = 14$

- Termina efectuando las sumas y restas en el orden en que aparezcan. Lee el problema de izquierda a derecha.

1º $30 - 24 \div 3 + 2 \times 5$

2º $30 - 8 + 10 = 22 + 10 = 32$

1. Efectúa cada una de las siguientes operaciones en tu cuaderno. Escribe la respuesta:

a. $40 - 2 \times (-5) =$

e. $18 \div 2 \times 4 =$

i. $-8 + 2 \times 3 =$

m. $25 - 5 \div 5 + 6 =$

b. $52 \div 4 + 3 =$

f. $45 - 5 + 6 \times 2 =$

j. $56 \div 7 \times 2 =$

n. $0 \div 5 \times 8 =$

c. $3 \times 5 + 6 \times 2 =$

g. $42 \times 3 + 5 - 2 =$

k. $(3 \times 2) - (5 \times 2) =$

o. $50 - (10 - 3) - 2$

d. $18 \div (2 \times 3) =$

h. $18 \div (-2) \times 3 =$

l. $(105 + 15) \div 5 =$

p. $8 \times 6 \div 3 =$

2. La Tierra está a una distancia de 148 800 000 km del Sol. Si la luz en un segundo viaja 297 600 km, ¿cuántos segundos tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

3. El producto de tres números es -9 024. Los dos primeros números son 12 y 16. ¿Cuál es el tercer número?

4. La suma de dos números es 40 y su cociente es 4. ¿Cuáles son esos dos números?

5. El cociente de dos números es 6 y su producto 54. ¿Cuáles son esos números?

6. La suma de tres números consecutivos es -60. ¿Cuáles son esos números?

7. Un directorio telefónico contiene 8 279 nombres de establecimientos. Si 100 nombres se escriben en una página, ¿serán suficientes 80 páginas para registrar el nombre de todos los establecimientos?

8. Un país de 550 000 kilómetros cuadrados de superficie tiene 56 100 000 habitantes. ¿Cuántos habitantes hay por cada kilómetro cuadrado? (En promedio).

9. Los 28 bombones que contiene una bolsa deben repartirse entre 7 niños. Cada uno de ellos toma un número diferente de bombones. ¿Cuántos bombones toma cada niño?

Radicación de enteros

La radicación es una operación inversa de la potenciación.

Los términos de la radicación son:

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \\ \uparrow \\ \sqrt[n]{a} = b \rightarrow \text{Raíz} \\ \downarrow \\ \text{Radicando} \end{array}$$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } \overbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}^{n \text{ veces}} = b^n = a$$

Ejemplo 1: $\sqrt{16} = 4$ pues $4^2 = 16$

También $\sqrt{16} = -4$ pues $(-4)^2 = 16$

Ejemplo 2: $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

Ejemplo 3: $\sqrt{-81}$ no existe.

1. Determina, si es posible, las siguientes raíces exactas en el conjunto de los enteros:

a. $\sqrt{64} =$ d. $\sqrt{-64} =$ g. $\sqrt{144} =$ j. $\sqrt[5]{-32} =$

b. $\sqrt[3]{-125} =$ e. $\sqrt[4]{256} =$ h. $\sqrt[3]{125} =$ k. $\sqrt[5]{32} =$

c. $\sqrt{-144} =$ f. $\sqrt{16} =$ i. $\sqrt{-16} =$ l. $\sqrt[4]{-1} =$

2. Encuentra un camino que atraviese de izquierda a derecha el siguiente cuadro, yendo de una casilla a otra en sentido horizontal, vertical y diagonal, pero conectando siempre raíces que puedan calcularse.

Hay más de un camino posible.

$\sqrt{-4}$	$\sqrt{44}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-9}$	$\sqrt{100}$
$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt[5]{-1}$	$\sqrt{-16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt[4]{81}$
$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[6]{1}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[4]{-81}$
$\sqrt[6]{-1}$	$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt[6]{-5}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt[5]{0}$	$\sqrt{-81}$
$\sqrt{-9}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt[6]{-1}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt{-16}$
$\sqrt{9}$	$\sqrt[7]{-1}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{-64}$

3. Encuentra el número que hace falta:

a. $2^x = 16$, $x =$ b. $m^2 = 100$, $m =$ c. $n^4 = 81$, $n =$ d. $p^3 = 125$, $p =$

4. Contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles números elevados a la cuarta potencia dan 256?

b. ¿Cuáles números elevados al cuadrado dan 36?

c. ¿Cuál número elevado a la quinta potencia da 0?

Fracciones equivalentes

Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ indican el mismo número.

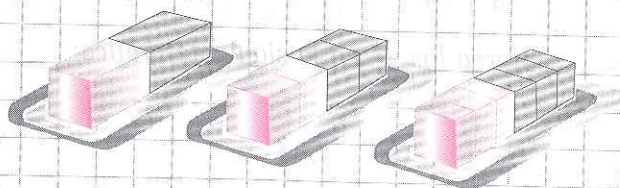
Se llaman **fracciones equivalentes**.

Se escribe: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

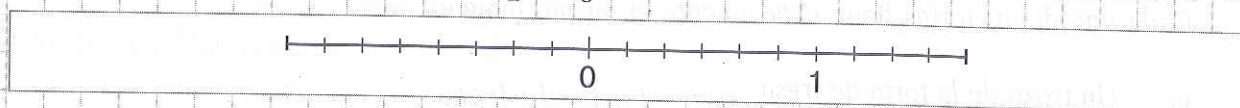
Observa que al multiplicar en cruz los productos son iguales: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{6}$

En general, $\frac{a}{b}$ es equivalente con $\frac{c}{d}$ si y sólo si, $a \times d = b \times c$.

1. Éstas son tres barras iguales de mantequilla. De cada barra se usó la parte sombreada. ¿De cuál de las barras se gastó más? Explica:



2. Localiza sobre la recta las fracciones: $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$.



a. ¿Cómo son las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$?

b. ¿Qué ocurre cuando se localizan sobre la recta numérica dos fracciones equivalentes?

3. Escribe una fracción equivalente con la dada:

a. $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$

d. $\frac{\square}{12} = \frac{3}{6}$

g. $\frac{2}{8} = \frac{12}{\square}$

j. $\frac{1}{2} = \frac{2}{\square}$

m. $\frac{18}{\square} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{4}{10} = \frac{\square}{100}$

e. $\frac{14}{\square} = \frac{7}{16}$

h. $\frac{1}{2} = \frac{\square}{16}$

k. $\frac{-2}{-5} = \frac{4}{\square}$

n. $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$

c. $\frac{100}{1000} = \frac{\square}{100}$

f. $\frac{50}{60} = \frac{\square}{6}$

i. $\frac{4}{16} = \frac{\square}{4}$

l. $\frac{1}{8} = \frac{2}{\square}$

o. $\frac{1}{3} = \frac{5}{\square}$

4. Para encontrar una fracción equivalente con otra puedes multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número (completar la fracción). Ese número no puede ser cero.

Ejemplo: Para hallar una fracción equivalente con $\frac{1}{3}$, podemos multiplicar por 4,

tanto el numerador como el denominador: $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$. De esta forma $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Orden en las fracciones

Si tienes mucha hambre, ¿prefieres comerte $\frac{1}{7}$ o $\frac{3}{7}$ de una torta?

Cuando las fracciones tienen el mismo denominador, compara los numeradores y determina qué fracción es mayor:

$$3 > 1, \text{ por lo tanto } \frac{3}{7} > \frac{1}{7}.$$

Cuando los denominadores son distintos usa el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores para escribir fracciones equivalentes.

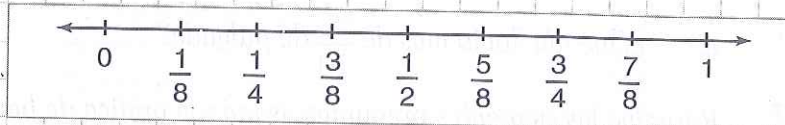
Ejemplo:

Comparar $\frac{2}{5}$ con $\frac{3}{4}$. El mcd de 5 y 4 es 20.

$$\text{Así: } \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20} \text{ y } \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}.$$

Se deduce que, $\frac{15}{20} > \frac{8}{20}$ y por lo tanto: $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$

- 1.** Escribe $>$, $<$ o $=$ para comparar las fracciones. Usa la línea numérica para facilitar tu tarea:



a. $\frac{6}{8} - \frac{3}{4}$ b. $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{2} - \frac{5}{8}$ d. $\frac{2}{4} - \frac{4}{8}$ e. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

- 2.** Escribe $>$, $<$, o $=$ para comparar las fracciones:

a. $\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$ c. $\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$ e. $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$ g. $\frac{3}{4} - \frac{6}{8}$ i. $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}$

b. $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$ d. $\frac{6}{6} - \frac{1}{3}$ f. $\frac{2}{13} - \frac{3}{17}$ h. $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}$ j. $\frac{2}{13} - \frac{3}{11}$

- 3.** Sonia comió $\frac{1}{2}$ de una torta y Doris $\frac{3}{8}$ de ella. ¿Cuál de las dos comió más?

- 4.** Dos recetas alcanzan para 8 personas. ¿Cuál es más económica, la que usa $\frac{1}{2}$ paquete de papas y $\frac{1}{3}$ de espinacas, o la que usa $\frac{3}{8}$ de papas y $\frac{2}{9}$ de espinacas?

- 5.** Miriam pasó $\frac{2}{3}$ de una hora horneando y $\frac{7}{8}$ de una hora mirando televisión. ¿En qué actividad pasó más tiempo?

Adición de fracciones

Para sumar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se procede de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{d \times b}$$

Fracciones equivalentes

Denominador común

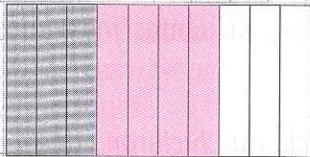
Ejemplo: sumar $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{7}$.

Solución:

Dos fracciones equivalentes a las dadas con denominador común son:

$$\frac{4}{3} = \frac{28}{21} \text{ y } \frac{5}{7} = \frac{15}{21} \quad \text{Por lo tanto:} \quad \frac{4}{3} + \frac{5}{7} = \frac{28}{21} + \frac{15}{21} = \frac{43}{21}$$

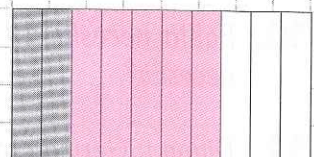
1. Escribe la suma correspondiente a cada ilustración y luego resuélvela:



a.



b.



c.

2. Realiza las siguientes sumas:

a. $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} =$

d. $\frac{6}{7} + \frac{4}{3} =$

g. $\frac{7}{2} + \frac{8}{5} =$

j. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$

b. $\frac{5}{4} + \frac{9}{2} =$

e. $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} =$

h. $\frac{5}{9} + \frac{3}{8} =$

k. $\frac{7}{10} + \frac{3}{20} =$

c. $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} =$

f. $\frac{1}{6} + \frac{4}{5} =$

i. $\frac{7}{10} + \frac{1}{8} =$

l. $\frac{1}{9} + \frac{2}{3} =$

3. Una modista requiere las cantidades de tela que se indican para su trabajo:

Cojín: $\frac{225}{2}$ cm

Cortina: $\frac{400}{3}$ cm

Forro: $\frac{6\ 705}{2}$ cm

- ¿Cuánta tela necesita la modista para hacer un cojín y un forro?
- ¿Cuánta tela necesita para coser una cortina y un cojín?
- ¿Cuánta tela necesita para coser una cortina y un forro?
- ¿Cuánta tela necesita para hacer dos cortinas y tres cojines?

4. Julia tiene media libra de manzanas. Compra otra libra y tres octavos de libra. ¿Cuántas libras tiene en total?

Propiedades de la suma de fracciones

Las propiedades que cumple la suma de fracciones puede resumirse así:

1. **Clausurativa:** Si sumas dos fracciones, el resultado es otra fracción.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$$

2. **Conmutativa:** No importa en qué orden sumes dos fracciones, el resultado es el mismo.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$$

3. **Modulativa:** Si sumas 0 a una fracción, obtienes la misma fracción.

$$\frac{1}{3} + 0 = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

4. **Invertiva:** Para toda fracción existe una fracción opuesta de tal forma que al sumarlas resulta cero.

$$\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

5. **Asociativa:** Si debes sumar tres o más fracciones, puedes agrupar de a dos e ir sumando este resultado con las siguientes fracciones.

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{89}{60} = \frac{89}{60}$$

1. Usa las propiedades de la suma de fracciones para resolver los siguientes ejercicios:

a. $\frac{8}{9} + \frac{1}{16} + \frac{3}{8} =$

c. $\frac{7}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{3}{4} =$

e. $3 + \frac{41}{6} + \frac{21}{10} =$

b. $4 + \frac{15}{7} + 1\frac{3}{2} =$

d. $\frac{12}{7} + \frac{5}{4} + 0 =$

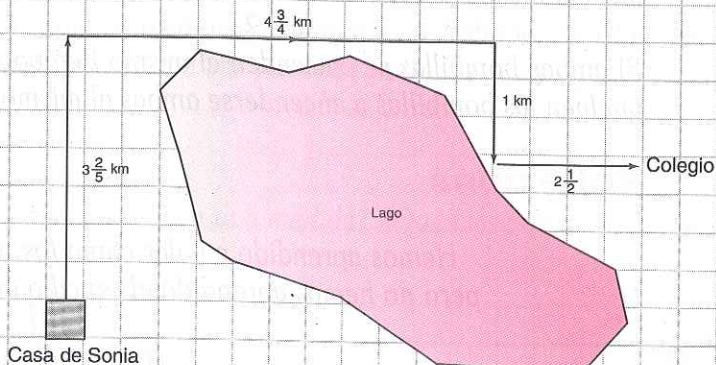
f. $0\frac{8}{9} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$

2. José tiene dos marcos rectangulares para fotos. Uno mide $13\frac{3}{4}$ cm por $21\frac{7}{8}$ cm. El otro mide $8\frac{1}{23}$ cm por 15 cm. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?

3. Para preparar una receta, Carlos pondrá los ingredientes en un recipiente con capacidad para 12 tazas. ¿Podrá echar en él $8\frac{1}{2}$ tazas de harina, $2\frac{3}{4}$ tazas de azúcar y $\frac{1}{4}$ de taza de polvo para hornear?

4. Todos los días Sonia recorre en bicicleta la ruta de su casa al colegio.

¿Cuántos kilómetros hay de la casa de Sonia al colegio?



Sustracción de fracciones

Para restar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se procede de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} - \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d - c \times b}{d \times b}$$

Fracciones equivalentes

Denominador común

Ejemplo: Resolver $\frac{7}{3} - \frac{1}{4}$ usando fracciones equivalentes con un denominador común.

Solución: El mínimo común denominador de 3 y 4 es 12.
Se hallan dos fracciones equivalentes a las dadas con denominador 12:

$$\frac{7}{3} = \frac{28}{12} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Luego:
$$\frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{28}{12} - \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$$

1. Resta las siguientes fracciones. Simplifica los resultados:

a. $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$ d. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} =$ g. $\frac{9}{8} - \frac{3}{8} =$ j. $\frac{3}{4} - \frac{1}{12} =$

b. $\frac{4}{5} - \frac{11}{15} =$ e. $\frac{17}{2} - \frac{5}{4} =$ h. $\frac{13}{8} - \frac{1}{2} =$ k. $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} =$

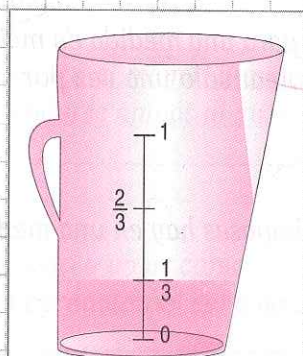
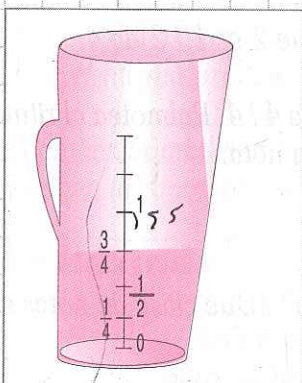
c. $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} =$ f. $\frac{17}{9} - \frac{2}{3} =$ i. $\frac{6}{7} - \frac{3}{14} =$ l. $\frac{15}{6} - \frac{8}{11} =$

2. Escribe las fracciones que hacen falta para que las igualdades se cumplan:

a. $\frac{1}{10} + = \frac{3}{10}$ c. $\frac{1}{4} + = \frac{1}{2}$ e. $\frac{2}{12} + = \frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{8} + = \frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{4} + \frac{5}{2} + = \frac{17}{4}$ f. $- + \frac{5}{2} = \frac{41}{14}$

3. Usa los dibujos para resolver los problemas:



Tenía $\frac{3}{4}$ de taza, ahora tengo $\frac{1}{2}$.
¿Qué parte de la taza usé?

Tengo $\frac{1}{3}$ de taza, y en total necesito $\frac{2}{5}$ de taza. ¿Qué parte de taza me hace falta?

Multiplicación de fracciones.

Propiedades

El producto de las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se calcula multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{6}{35}$$

$$\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{15}$$

1. Efectúa cada uno de los siguientes productos. Simplifica los resultados si es posible.

a. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

d. $-\frac{2}{7} \times \frac{5}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$

g. $-\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

b. $-\frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

e. $-\frac{5}{11} \times \frac{4}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$

h. $-\frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

c. $-\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$

f. $-\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$

i. $-4 \times \frac{5}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Observa cómo se halla gráficamente $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, es decir, el producto: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$.

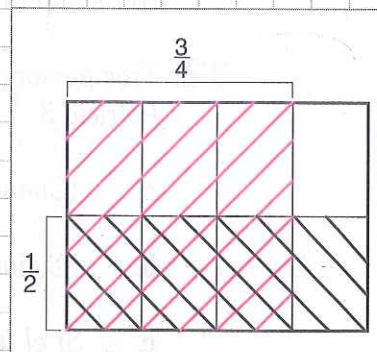
a. Completa la explicación:

_____ cuartas partes del rectángulo tienen rayas de color.

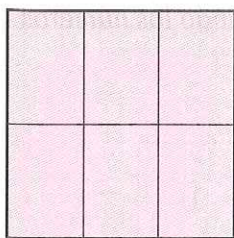
La _____ del rectángulo tiene rayas negras.

El rectángulo se dividió en total en _____ partes iguales, de las cuales tienen rayas de color y negras a la vez, es decir:—.

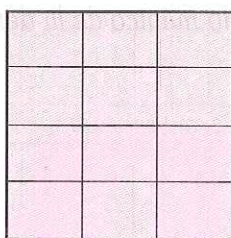
Por lo tanto: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$



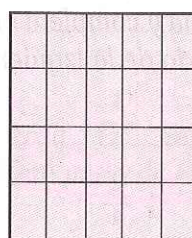
b. Representa gráficamente los siguientes productos:



$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$



$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$



$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$



$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$

3. De los $\frac{3}{4}$ de hora que dura la clase de ciencias, la tercera parte se dedica al desarrollo de un laboratorio. ¿Cuánto tiempo dura el laboratorio?

División de fracciones:

4. Completa las siguientes divisiones:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ej: $\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$

a. $\frac{3}{5} \div \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

c. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

e. $\frac{7}{2} \div \frac{14}{14} = 1$

b. $5 \div \frac{25}{2} = \frac{2}{5}$

d. $\frac{4}{7} \div \frac{3}{21} = \frac{20}{21}$

f. $\frac{12}{5} \div \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

5. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\frac{24}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{18}{7}$

d. $\left(\frac{8}{5} - \frac{6}{7}\right) \div \frac{4}{9} = \frac{14}{5}$

g. $-\frac{5}{11} \div \frac{11}{2} = -\frac{2}{11}$

b. $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) \div -\frac{3}{5} = \frac{1}{2}$

e. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{20}{17}$

h. $-\frac{15}{7} \div \frac{6}{13} = -\frac{15}{2}$

c. $\left(2 - \frac{5}{6}\right) \div -7 = -\frac{7}{6}$

f. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) = -\frac{10}{17}$

i. $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \div \frac{1}{4} = \frac{31}{5}$

6. El producto de dos fracciones es $\frac{5}{8}$. Si una de ellas es $-\frac{2}{3}$, determina la otra: $-\frac{15}{8}$

7. ¿Por cuál número se debe dividir a 3 para obtener 9? $\frac{1}{3}$

8. Luis tenía un pedazo de madera de $\frac{5}{8}$ m de largo. Lo cortó en 4 pedazos iguales. ¿De qué largo es cada pedazo? $\frac{5}{32}$

9. Julio gasta $\frac{1}{6}$ de lo que gana en ropa y divide el resto en 4 partes iguales para los demás gastos de la familia. ¿Qué fracción representa cada una de dichas partes? $\frac{5}{24}$

10. Jorge vierte $\frac{1}{4}$ de pintura roja en una cubeta. Necesita añadir la tercera parte de esa cantidad de pintura amarilla. ¿Qué fracción de pintura amarilla necesita? $\frac{1}{12}$

11. Alberto horneó 2 panes. Cortó cada pan en sextos. ¿Cuántos pedazos tiene? 6

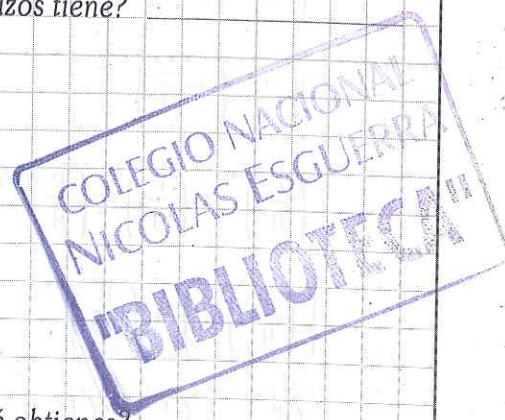
Calculadora

Observa esta división:

$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 967} \\ \underline{26} \\ 5 \end{array}$$

Realiza con calculadora la operación: $96 \div 7 = 13.714285714285714$ ¿Qué obtienes?

Con la calculadora, ¿cómo haces para obtener el residuo de la división anterior? $0.7142857142857143 \times 7 = 5$



Potenciación de fracciones

Exponente

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \rightarrow \text{Potencia}$$

Base

1. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$ _____

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$ _____

e. $\left(\frac{2}{5}\right)^4 =$ _____

g. $\left(-\frac{5}{4}\right)^2 =$ _____

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ _____

d. $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 =$ _____

f. $\left(\frac{5}{4}\right)^2 =$ _____

h. $\left(-\frac{3}{8}\right)^2 =$ _____

2. Determina el valor desconocido en cada uno de los siguientes casos:

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27}$ $x =$ _____

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$ _____

e. $\left(\frac{t}{v}\right)^2 = \frac{81}{100}$

b. $\left(\frac{k}{r}\right)^1 = \frac{4}{3}$ $k =$ _____
 $r =$ _____

d. $\left(-\frac{t}{v}\right)^2 = \frac{1}{16}$ $t =$ _____
 $v =$ _____

f. $\left(\frac{w}{w}\right)^3 = 1$ $w =$ _____

3. Las siguientes son las propiedades de las fracciones. En cada caso p y q son enteros y además $q \neq 0$. Obsérvalas y escribe un ejemplo de cada una al lado derecho.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^0 = 1$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^1 = \frac{p}{q}$$

Ejemplo:

$$q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$$

Ejemplo:

$$\left(\left(\frac{p}{q}\right)^m\right)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^{m \times n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n \times \left(\frac{r}{s}\right)^n = \left(\frac{p \times r}{q \times s}\right)^n$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m \div \left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^{m-n}$$

Ejemplo:

Adición y sustracción de decimales

Para sumar dos o más decimales se escriben en columna de modo que las comas decimales estén también en columna. Se suman como si fueran enteros y en la suma se escribe la coma decimal en la misma columna. Si los sumandos no tienen las mismas cifras decimales se escriben ceros a la derecha de la última cifra hasta igualarlas.

Para restar dos números decimales se escriben en columna, de tal forma que las comas estén también en columna. Se restan como los números enteros, y en la diferencia se escribe la coma decimal en la misma columna.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 2,40 \\ 23,76 \\ + 1,06 \\ \hline 27,22 \end{array}$$

Ejemplo:

Efectuar la resta indicada:

$$\begin{array}{r} 134,700 \\ - 45,675 \\ \hline 89,025 \end{array}$$

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a. $7,21 + 0,3 + 0,29 =$

f. $0,03 + 2 + 5,63 =$

b. $5,43 + 0,018 + 9,1 + 11 =$

g. $23 + 43,21 + 0,003 =$

c. $7,493 - 0,829 =$

h. $5,486 - 4,938 =$

d. De 5,943 restar 2,063:

i. De 100 restar 32,65:

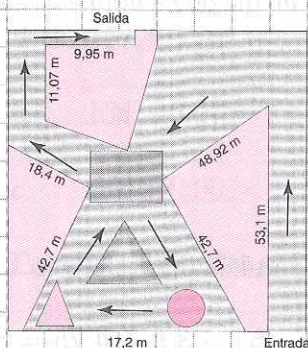
e. Restar 0,43 de 4,2:

j. De 72,4 restar 51,79

2. El camino que conduce de la casa de Patricia al parque tiene 9 245,8 metros de largo. La ruta que conduce de la casa de Nando al parque tiene 4 680,6 metros de largo. Aproximadamente, ¿cuánto más lejano está el parque de la casa de Patricia que de la de Nando?

3. María gasta 5,5 minutos de su casa al parque. Tarda otros 12,3 minutos en ir del parque a la casa de su tía. ¿Cuánto tiempo tarda María de su casa a la de su tía si durante el trayecto no se detiene?

4. El diagrama muestra el interior de un jardín botánico. Usa el diagrama para responder las preguntas:



a. Si partes de la entrada, ¿cuántos metros debes recorrer para visitar todo el jardín?

b. Después de visitar la exposición de orquídeas, ¿será tu camino más corto si visitas la exhibición de claveles antes que la de tulipanes?

c. Si sólo visitas la exposición de orquídeas, ¿cuántos metros dejaste de visitar?

Multiplicación y división de decimales

Los números decimales se multiplican como si fueran números enteros. En el producto se separan tantas cifras decimales como tengan los factores.

23,45	2 cifras decimales
2,435	3 cifras decimales
57,10075	5 cifras decimales

$$23,45 \times 2,435 = 57,10075$$

Para dividir un decimal entre otro decimal se multiplica el dividendo y el divisor por la potencia de 10 que convierte al divisor en entero.

El cociente $43,56 \div 3,218$, es equivalente a: $(43,56 \times 1\,000) \div (3,218 \times 1\,000)$
 $43\,560 \div 3\,218 = 13,536$

Para dividir un decimal por un entero se divide primero la parte entera y al bajar la primera cifra decimal se coloca coma en el cociente.

$$78,43 \div 6 = 13,07$$

1. Efectúa los cocientes siguientes en tu cuaderno. Anota aquí el cociente.

a. $75 \div 2,5 =$

d. $1,6 \div 0,4 =$

g. $0,16 \div 0,04 =$

b. $28 \div 1,4 =$

e. $81 \div 0,9 =$

h. $10,8 \div 2,7 =$

c. $4,5 \div 4,9 =$

f. $26,6 \div 3,8 =$

i. $59,54 \div 8,5 =$

2. Usa la calculadora para hallar los primeros tres cocientes y determina una forma rápida de dividir entre 10, 100, 1 000 para hallar los restantes en forma inmediata:

a. $7\,200 \div 100 =$

d. $345 \div 100 =$

g. $17 \div 100 =$

b. $3 \div 100 =$

e. $0,5 \div 100 =$

h. $0,031 \div 100 =$

c. $0,008 \div 100 =$

f. $1,12 \div 100 =$

i. $14,3 \div 1\,000 =$

3. Usa la calculadora para hallar los primeros tres cocientes y determina una forma rápida de dividir por 0,1; 0,01; 0,001 para hallar los restantes en forma inmediata:

a. $347 \div 0,1 =$

d. $28 \div 0,01 =$

g. $0,41 \div 0,1 =$

b. $134 \div 0,01 =$

e. $14\,032 \div 0,001 =$

h. $5\,397 \div 0,01 =$

c. $416 \div 0,001 =$

f. $304 \div 0,01 =$

i. $41 \div 0,001 =$

4. Completa: Dividir por 0,1 es multiplicar por: _____ Dividir por 0,01 es multiplicar por: _____

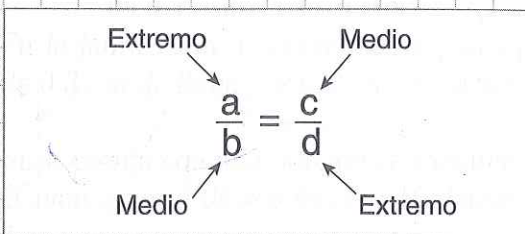
Dividir por 0,001 es multiplicar por: _____ Dividir por 0,01 es multiplicar por: _____

Razones y proporciones

La **razón** entre dos magnitudes es un número sin unidades, y se expresa con la división indicada de las magnitudes.

En la razón $\frac{a}{b}$, a se llama el antecedente y b es el consecuente.

Una **proporción** expresa la equivalencia de dos razones.



Ejemplo:

Una sala tiene 8 m de largo por 5 m de ancho, la razón entre largo y ancho es de 8 a 5, que se escribe $\frac{8}{5}$, pero se lee «ocho a cinco» y no «ocho quintos».

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} \quad \text{pues, } 3 \times 20 = 5 \times 12$$

Se puede escribir: $a : b :: c : d$.

En general si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces:

$$a \times d = b \times c$$

- En un colegio hay 52 estudiantes en sexto, 38 en séptimo, 46 en octavo, 50 en noveno, 45 en décimo y 33 en undécimo. Calcula la razón entre:
 - El número de estudiantes entre el grado sexto y el total de estudiantes:
 - El número total de estudiantes de grado impar y el total de estudiantes:
 - El número total de estudiantes de grado par y el total de estudiantes:
 - La razón entre el número de estudiantes del grado séptimo y el grado octavo.
- Una persona duerme diariamente 8 horas.
 - ¿Cuál es la razón entre las horas que duerme y las que permanece despierto?
 - ¿Cuál es la razón entre el total de horas diarias y el de las horas que duerme?
- Sonia estudió una hora para la prueba de historia y 35 minutos para la prueba de matemáticas. Escribe una razón para comparar las horas de estudio de estas dos materias:
- Escribe las siguientes razones en forma de fracción. Después escríbelas en su mínima expresión:
 - 5 a 15
 - 8 a 12
 - 12 a 15
 - 9 a 18
- Completa los números que faltan para que se establezca una proporción entre cada par de razones:
 - $\frac{24}{8} = \frac{\quad}{1}$
 - $\frac{12}{3} = \frac{4}{\quad}$
 - $\frac{18}{4} = \frac{\quad}{2}$
 - $\frac{\quad}{15} = \frac{45}{1}$

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al representarlas en un sistema de coordenadas cartesianas se obtienen puntos a lo largo de una línea recta que pasa por el origen del sistema.

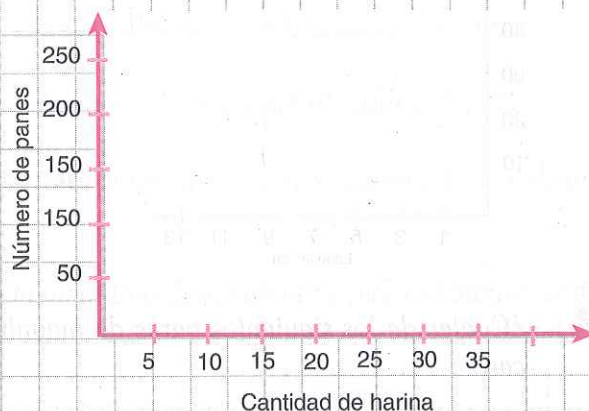
De otra manera, dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre la magnitud dependiente y la independiente es constante.

Ejemplo:

Un panadero usa 10 kg. de harina para preparar 100 panes del mismo tamaño y forma. Observa la tabla que relaciona la cantidad de harina y el número de panes preparados.

Cantidad de harina	5	10	20	25
Número de panes	50	100	200	250

1. Representa los datos de la tabla del ejemplo. ¿Qué clase de gráfica obtienes?



a. Si el panadero tuviera 30 kg de harina, ¿cuántos panes podría preparar?

b. ¿Cuánta harina requiere el panadero para preparar 550 panes?

2. Completa la siguiente tabla, suponiendo que los términos de la segunda fila son proporcionales a los de la primera fila:

3	6	9	12	0,3	0,6	1,2	2,4	4,8	24

3. Un automóvil consume 7,5 litros de gasolina para recorrer 100 km. Completa la siguiente tabla de acuerdo con ese dato:

Litros	42	7,5	
Kilómetros		100	240

4. Un grifo arroja 12 litros en 15 segundos. Completa la siguiente tabla de acuerdo con ese dato:

Litros	280	12	
Segundos		15	80

5. En esta tabla aparece la lista de precios de un par de zapatos de un mismo modelo:

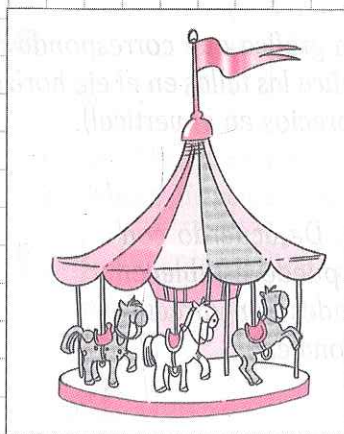
Talla	32	33	35	36	37	38	39	40	41
Precio	90	90	100	110	110	120	120	130	130

a. ¿El precio es proporcional a la talla? Justifica tu respuesta:

Problemas de aplicación

La proporcionalidad resulta muy útil para resolver múltiples problemas. Observa el siguiente ejemplo:

Un tiovivo da 24 vueltas en 5 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en hacer 38 vueltas?



Solución:

Si llamamos t al tiempo pedido, la proporción que se deduce del enunciado es: $\frac{24}{5} = \frac{38}{t}$

Por la propiedad de las proporciones se tiene que:

$$24 \times t = 38 \times 5, \quad 24 \times t = 190, \quad t = \frac{190}{24} = 7,916 \text{ minutos.}$$

Para dar 38 vueltas, el tiovivo necesita 7,916 minutos, aproximadamente.

1. Un automóvil rueda a 75 km por hora.
 - a. ¿Qué distancia recorrerá en 35 minutos?
 - b. ¿Cuánto tiempo requerirá el automóvil para recorrer 97,5 km?
2. Con 100 kg de manzanas pueden producirse 60 litros de cidra...
 - a. ¿Cuántas manzanas se requieren para obtener 2 400 litros de cidra?
 - b. ¿Qué cantidad de cidra se puede fabricar con 1 230 kg de manzanas?
3. A los 10 años de edad Sonia medía 1,20 m. ¿Se puede predecir con exactitud la altura de Sonia a los 18 años?
4. Un barco atraviesa el Océano Atlántico en 10 horas. ¿Cuánto tiempo requerirán 5 barcos en atravesarlo manteniendo las mismas condiciones?
5. Durante los primeros 12 meses, el peso de un bebé aumenta 3 gramos por día.

Suponiendo que el aumento del peso es proporcional a la edad, calcula el peso de una persona de 10 años, que al nacer pesaba 3 kg.
6. Con 20 kg de leche, se pueden fabricar 3 150 kg de queso. ¿Cuántos litros de leche se necesitan para fabricar 50 kg de queso? (Un litro de leche pesa 1 032 g.)
7. Considera un rectángulo ABCD cuyos vértices A y B son fijos y los vértices C y D son móviles. Supón que $AB = 4 \text{ cm}$.

Porcentajes o tanto por ciento

Los descuentos en algunos artículos, los intereses que paga o que cobra un banco, etc., se suelen expresar mediante un número cuyo denominador es 100.

Si una rebaja por cada \$ 100 de compra es de \$ 5, se escribe $\frac{5}{100}$, o bien 5 %, que se lee «cinco por ciento».

Las fracciones decimales $\frac{5}{100} = 5\%$ y $\frac{10}{100} = 10\%$ cuyo denominador es 100 se llaman también **porcentajes o tanto por ciento**.

Ejemplo:

Al comprar un artículo que vale \$ 8 200 nos hacen un descuento del 5 %. ¿Cuánto tenemos que pagar?

Solución:

Si de \$ 100 nos rebajan \$ 5, entonces de \$ 8 200 nos rebajan x.

Escribamos y resolvamos la proporción correspondiente:

$$\frac{100}{8\,200} = \frac{5}{x} \quad x = 410.$$

La rebaja es de \$ 410. Debemos pagar por lo tanto, $8\,200 - 410 = \$ 7\,790$.

1. Calcula lo que debes pagar al hacer las siguientes compras con los descuentos indicados:

a. Compra: \$ 27 000 Descuento: 10% Debes pagar:

b. Compra: \$ 120 000 Descuento: 25% Debes pagar:

2. Escribe de qué manera interpretas los siguientes enunciados:

a. El costo de la canasta familiar aumentó en un 18 %:

b. El 70% de la población de un país vive en la absoluta pobreza:

c. El Banco Nacional presta dinero a un interés del 5% mensual:

3. Escribe como porcentaje:

a. 9 de 100: b. 10 de 100: c. 43 de 100: d. 100 de 100:

4. Escribe en forma de porcentaje:

a. $\frac{18}{100} =$ b. $\frac{8}{10} =$ c. $\frac{1}{2} =$ d. $\frac{7}{25} =$

5. Escribe en forma de fracción y halla su mínima expresión:

a. 10%: b. 65 %: c. 86 %: d. 12%:

PROPORCIONALIDAD INVERSA: Si una magnitud aumenta y la otra disminuye

2. Con el fin de planificar los gastos domésticos, una familia contabilizó el tiempo diario que dura prendido el fogón de la estufa y el tiempo que tarda el gas en consumirse. Los datos obtenidos muestran que las dos cantidades son inversamente proporcionales. De acuerdo con los anteriores completa esta tabla:

Horas diarias que permanece prendido el fogón	1	2	3	4	5	6
Duración del cilindro en días	18	9	6			

Realiza una gráfica sobre el eje de coordenadas con los anteriores datos y descríbela.

3. Para tender la red de alcantarillado entre dos puntos se necesitan 6 000 tubos de 2,40 metros de largo. Para tender el mismo alcantarillado, ¿cuántos tubos de 4 m de largo se necesitan?
4. Un grupo de 120 personas hacen una salida al campo. Tienen provisiones para 30 días. Si el grupo se encuentra con 40 personas más que no llevan provisiones, ¿para cuántos días alcanzarán las provisiones?
5. En 12 días 300 gallinas consumen 5 bultos de concentrado. ¿Cuántas gallinas más se alimentan con la misma cantidad de concentrado durante 8 días?
6. Un auto recorre la distancia entre dos ciudades en 4 horas a una velocidad de 60,5 k/h. Para recorrer esa misma distancia en 10 h, ¿qué velocidad deberá llevar el auto?
7. Con el vino que hay en un tonel se llenan 300 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro cada una. ¿Cuántas botellas se podrían llenar si la capacidad de cada botella fuera $\frac{3}{10}$ de litro?
8. Un automóvil, a una velocidad de 60 km/h, tarda 8 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardaría en recorrer la misma distancia si la velocidad fuera de 120 km/h?
9. Un ganadero, a fin de que la comida de que dispone alcance para alimentar a sus bueyes durante 20 semanas, vende 60 bueyes. Si no los hubiera vendido, sólo tendría alimento para 14 semanas. ¿Cuántos bueyes le quedaron?
10. Dos obreros trabajan 2 días para abrir un hueco.
- ¿Cuántos días necesitarán 4 obreros para abrir el mismo hueco, si trabajan al mismo ritmo?
 - ¿Cuántos días tardarán esos mismos dos obreros para perforar el mismo hueco, trabajando dos veces más rápido?

Ingenio y creatividad

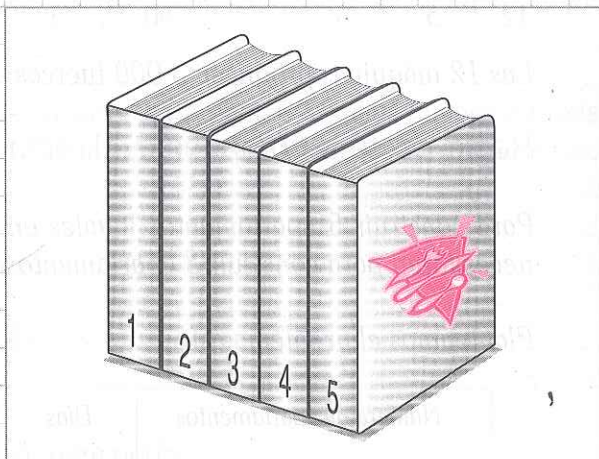
- En una carrera de bicicletas, Oscar es más rápido que William pero menos rápido que Jacques; este último es 3 veces más rápido que William pero menos que Claudia que es dos veces más rápida que Oscar.
 - ¿Quién tiene la mayor oportunidad de ganar?
 - ¿Quién ocupará la segunda posición?

Regla de tres Compuesta (Más de 2 Variables)

1. Tres máquinas iguales trabajan 6 horas diarias para fabricar 1 800 ganchos de ropa. ¿Cuántos ganchos pueden fabricar 5 máquinas trabajando 8 horas diarias?
2. Cuatro alumnos de grado séptimo gastan 6 pares de zapatos de igual marca durante 80 días. ¿Cuántos pares de zapatos gastará el grupo de 40 personas durante 196 días del año?
3. En un viaje una persona recorre en automóvil 2 400 km, viajando 6 horas diarias durante 8 días. ¿Cuántas horas diarias debería viajar para recorrer 3 000 km en 6 días?
4. Una persona lee un libro de 1 000 páginas en 20 días leyendo diariamente 30 minutos. Si desea leer otro libro de 1 200 páginas en 25 días, ¿cuántos minutos debe leer diariamente?
5. Las 10 personas que conforman una excursión tienen agua para 4 días a razón de 6 litros diarios. Si dos de los excursionistas deciden no continuar y quedarse en una ciudad y los demás continúan su camino durante dos días más, ¿cuál debe ser ahora la ración diaria de agua?
6. En un galpón, 20 gallinas producen 190 huevos en 12 días. ¿Cuántos huevos producen 30 gallinas en 48 días?
7. Una familia de 12 personas tiene agua potable para 18 días consumiendo 40 litros diarios. Si la familia recibe tres visitantes y desea que 720 litros de agua alcancen para 45 días, ¿cuál deberá ser el consumo diario?
8. Un motor extrae de una piscina 3 600 litros de agua en 3 horas. ¿Cuántos litros de agua pueden extraer 4 motores iguales al primero en 5 horas?
9. Si 5 conejos comen 5 zanahorias en 5 minutos, ¿cuántos conejos comen 10 zanahorias en 10 minutos?
10. En 25 días, 18 personas trabajando 4 horas diarias, han pavimentado 280 metros de carretera. Diez personas trabajando 8 horas diarias, ¿en cuánto tiempo pavimentarán 500 m de carretera?
11. Un depósito de 300 litros de capacidad se llena en 9 horas con un grifo de 5 centímetros cuadrados de sección. Un depósito de 500 litros, con un grifo de 3 centímetros cuadrados de sección, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse?

Ingenio y creatividad

Se colocan cinco libros idénticos, numerados del 1 al 5 en un estante tal como se muestra en la figura. Si cada libro contiene exactamente 300 hojas, sin tomar en cuenta las portadas, ¿cuántas hojas se encuentran entre la primera hoja del primer libro y la última del quinto libro?



Reflexiona

Jamás hubo una guerra buena
o una paz mala.

Benjamin Franklin (1706 - 1790)

Repartos proporcionales

En muchas situaciones de la vida diaria se debe repartir una suma o total en varias partes que son proporcionales a números previamente acordados. Por ejemplo, la ganancia de una sociedad es proporcional al capital aportado por cada uno de los socios, etc.

Propiedad fundamental de la serie de razones iguales

En una serie de razones iguales, cada razón es igual al cociente que se obtiene de sumar todos los antecedentes y dividirlos sobre la suma de los consecuentes.

Si $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ entonces se cumple que:

$$\frac{a}{x} = \frac{a + b + c}{x + y + z}; \quad \frac{b}{y} = \frac{a + b + c}{x + y + z};$$

$$\frac{c}{z} = \frac{a + b + c}{x + y + z}$$

Ejemplo

Se necesita repartir 810 gallinas entres corrales; el primero tiene 8 m², el segundo tiene 10 m² y el tercero 12 m². ¿Cuántas gallinas ocupan cada corral?

Solución:

Las gallinas deben repartirse proporcionalmente al tamaño de cada corral.

Si llamamos a, b y c la cantidad de gallinas en cada corral, x, y y z el área de cada corral, establecemos las siguientes proporciones:

$$\text{Corral 1: } \frac{a}{8} = \frac{810}{30} \quad a = \frac{810 \times 8}{30} = 216$$

$$\text{Corral 2: } \frac{b}{10} = \frac{810}{30} \quad b = \frac{810 \times 10}{30} = 270$$

$$\text{Corral 3: } \frac{c}{12} = \frac{810}{30} \quad c = \frac{810 \times 12}{30} = 324$$

1. Dos hermanos de 8 y 11 años se reparten 95 billetes proporcionalmente a sus edades. ¿Cuántos billetes le corresponden a cada uno?
2. Tres socios aportan respectivamente \$ 25 000, \$ 15 000 y \$ 10 000 para comenzar un negocio. La ganancia que se obtuvo fue de \$ 200 000 y deciden repartirla proporcionalmente a sus aportes. ¿Cuál es la parte que le corresponde a cada uno?
3. Un padre quiere repartir 50 000 estampillas de colección entre sus 3 hijos en partes proporcionales a sus edades, que son 12, 16 y 22 años. ¿Cuántas le corresponden a cada uno?
4. Ana, Jorge y Carlos compran un billete de lotería cuyo costo es \$ 18 000. Ana aporta \$ 5 000, Jorge \$ 10 000 y Carlos el resto. El billete gana un premio por un valor de \$ 60 000 000 sobre el cual se descuenta el 5% por ganancia ocasional. Si el premio se reparte proporcionalmente a los aportes de las tres personas, ¿cuánto le corresponde a cada uno?
5. Entre dos hermanas y un hermano compraron un terreno de 840 m² de superficie. La hermana mayor aportó \$ 850 000, la del medio \$ 600 000 y el menor \$ 490 000. ¿Qué cantidad de terreno le corresponde a cada hermana y al hermano?
6. Para ocupar los 16 puestos del concejo municipal se depositaron 800 000 votos. Por la lista A hubo 150 000 votos, por la lista B, 200 000 votos y por la lista C, el resto. ¿Cuántos concejales habrá de cada lista?